Dos medidas decrecientes para STLC

Pablo Barenbaum

Cristian Sottile

3er Encuentro FunLeP

FaMAF – UNC

18 y 19 de mayo de 2023

EXACTAS UBA

CONICET

Universidad Nacional de Quilmes

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

ICC Instituto de Ciencias de la Computación

</CPI>
01010101.01001110.01010001

Medida decreciente

$$M \to_\beta N \implies \#(M) > \#(N)$$

El *koan* #26
Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Pruebas de SN

- Técnicas semánticas

$$[\![A \to B]\!] = [t \mid \forall s \in [\![A]\!].\ ts \in [\![B]\!]]$$

- Técnicas sintácticas
  - increasing functionals: traducción a naturales y funciones crecientes
  - grados de redexes: medida de Turing, WN, traducción a λI
- Nuestro trabajo
  - Traducción a cálculo *non-erasing*
  - Definición de medida aprovechando las características de este cálculo

El cálculo auxiliar λ^m

Motivación

- Cualidad *erasing* de β

$$(\lambda x.y)t \to_\beta y$$

- Motivación para no borrar
  - $INC \land WCR \land WN \implies SN \land CR$
  - Consideramos los s alcanzables desde t: $\{s \mid t \to_\beta^* s\}$
  - Sea t con forma normal es v, valen:
    - La f.n. de s es v por confluencia
    - $|v| > |t|$
    - $|t| < |s| < |v|$
  - Defino $\#(t) = |v| - |t|$

El cálculo auxiliar λ^m

Definición

- Términos: *wrappers* y *memories*

$$\ldots \mid t\{s\} \qquad\qquad t\{s\{r\}\}\{u\} \implies t\mathsf{L}$$

- Reducción: $(\lambda x.t)\mathsf{L}s \to_m t[s/x]\{s\}\mathsf{L}$
- Operaciones básicas: altura de un tipo, grado de un redex, grado máximo de un término, peso $\mathsf{w}(t)$ de un término
- Propiedades: SR, confluencia
- Simplificación
  - $\mathsf{S}_d(D)$t: contracción simultánea de los redexes de grado D en t
  - $\mathsf{S}_*(t)$: simplificación iterativa desde D hasta 1, *i.e.* $\mathsf{S}_1(\ldots\mathsf{S}_D(t)\ldots)$
  - Propiedades de $\mathsf{S}_*(t)$
    - Alcanzable mediante reducción: $t \to_m^* \mathsf{S}_*(t)$
    - Es la forma normal de t
- Reducción *forgetful*
  - Def. $t\{s\} \triangleright t$
  - *e.g.* $(\lambda x.x)t \to_m t\{t\} \triangleright t$
  - Conmuta con $\to_m$
  - Si $M \to_\beta N$ entonces $M \to_m s \triangleright N$

Medida $\mathcal{W}$

- λ^m es *increasing*: $\mathsf{w}(t)$
- $\mathcal{W}(M) = \mathsf{w}(\mathsf{S}_*(M))$
- Intuición: la f.n. de M en λ^m tiene más recuerdos que la de N

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & N \arrow[d] \\
\mathsf{S}_*(M) \arrow[r, phantom, "\triangleright"] \arrow[d] & \mathsf{S}_*(N) \arrow[d] \\
\mathsf{w}(\mathsf{S}_*(M)) \arrow[r, phantom, ">"] & \mathsf{w}(\mathsf{S}_*(N))
\end{tikzcd}
$$

- Remark: no hace falta WN para definir esta medida

Medida $\mathcal{T}^m$

Introducción: la medida de Turing $\mathcal{T}$

- Definición: $\mathcal{T}(M) = [d \mid R \text{ redex de grado } d \text{ en } M]$
- Decrece al contraer el redex de mayor grado ubicado más a la derecha
- Nuestra idea: generalización a todos los redexes
- Por qué no funciona
  - D grado máximo
  - contraigo redex R de grado $d < D$
  - R copia un redex S de grado D

Medida $\mathcal{T}^m$

Primer intento

- Generalizar a familia de medidas indexada por grados

- Intuición: considero grado y redexes de menor grado

- Definición: $\mathcal{T}_D(M) = [(d, \mathcal{T}_{d-1}(M)) \mid R \text{ redex de grado } d \leq D \text{ en } M]$

- Funciona para el caso $D > d$
  - Grado máximo D
  - Contraigo $d < D$, que copia redexes de grado D
  - $\mathcal{T}_D(M) = [(D, \mathcal{T}_{D-1}(M)), \dots]$
  - $\mathcal{T}_D(N) = [(D, \mathcal{T}_{D-1}(N)), \dots]$

- No funciona para el caso $D = d$
  Como considero redexes de menor grado, no sirve al copiar redexes del mismo grado

Medida $\mathcal{T}^m$

Segundo intento

- Nociones de residuo y desarrollo
- Intuición: considero grado y desarrollos del grado
  Contemplo no solo los redexes existentes, también los que existirán
- Definición

  $$\mathcal{T}^{\beta}_{\leq D}(M) = [(d, \mathcal{R}^{\beta}_{\leq d}(M)) \mid R \text{ redex de grado } d \leq D \text{ en } M]$$
  $$\mathcal{R}^{\beta}_{\leq D}(M) = [\mathcal{T}^{\beta}_{\leq D-1}(M') \mid \rho : M \xrightarrow{D}{}^{*}_{\beta} M']$$
- Funciona para el caso $D = d$
  Se reduce a ver que tengo más desarrollos D en M que en N
- No funciona para el caso $D > d$
  Puede borrarse el redex original y $\mathcal{T}^{\beta}_{\leq D-1}(M') = \mathcal{T}^{\beta}_{\leq D-1}(N')$

Medida $\mathcal{T}^m$

Definición

- Intuición: considero grado y desarrollos del grado en λ^m
- Definición de $\mathcal{T}^m_{\leq D}$ y $\mathcal{R}^m_{\leq D}$

  $$\mathcal{T}^m_{\leq D}(M) = [(d, \mathcal{R}^m_{\leq d}(M)) \mid R \text{ redex de grado } d \leq D \text{ en } M]$$
  $$\mathcal{R}^m_{\leq D}(M) = [\mathcal{T}^m_{\leq D-1}(M') \mid \rho : M \xrightarrow{D}{}^{*}_{m} M']$$

- Funciona para el caso $D = d$
- Funciona para el caso $D > d$
- Teorema: $\mathcal{T}^m_{\leq D}(M) > \mathcal{T}^m_{\leq D}(N)$

Resumen

- *Koan* sobre medida *fácil*
- Técnicas semánticas y sintácticas
- Cálculo *non-erasing* λ^m
- Medida $\mathcal{W}$: sencilla, costosa
- Medida $\mathcal{T}^m$: compleja, más costosa, extiende resultados de Turing