Midiendo programas para probar que terminan

Cristian Sottile

Doctorando

Trabajo conjunto con

Pablo Barenbaum

5to Día de la Investigación en Ciencias de la Computación

28 de marzo de 2023

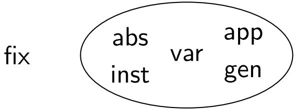
Terminación de programas

Terminación de programas

- Resoluble en lenguajes no Turing completos
  como $\lambda^{\rightarrow}$, λ^{2}, CoC, Coq, Agda
  (TC se recupera con fix que permite loops)

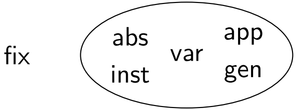
Terminación de programas

- Resoluble en lenguajes no Turing completos
  como $\lambda^{\rightarrow}$, λ^2, CoC, Coq, Agda
  (TC se recupera con fix que permite loops)



Terminación de programas

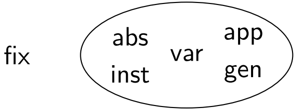
- Resoluble en lenguajes no Turing completos
  como $\lambda^{\rightarrow}$, λ^2, CoC, Coq, Agda
  (TC se recupera con fix que permite loops)



- Terminación en el cálculo λ tipado: normalización fuerte (SN)

Terminación de programas

- Resoluble en lenguajes no Turing completos como $\lambda^{\rightarrow}$, λ^2, CoC, Coq, Agda (TC se recupera con fix que permite loops)

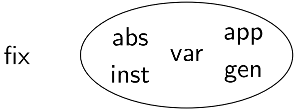


- Terminación en el cálculo λ tipado: normalización fuerte (SN)

- ¿Por qué demostrar terminación?

Terminación de programas

- Resoluble en lenguajes no Turing completos
  como $\lambda^{\rightarrow}$, λ^{2}, CoC, Coq, Agda
  (TC se recupera con fix que permite loops)



- Terminación en el cálculo λ tipado: normalización fuerte (SN)

- ¿Por qué demostrar terminación?

- Técnicas de demostración
  - Semánticas
  - Sintácticas

Dos nuevas medidas decrecientes

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \to t$

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \rightarrow t$
- al descartar argumentos se pierde información $(\lambda x.y)t \rightarrow y$

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $(\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $(\lambda x.y)t \to y\{t\}$

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $(\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $(\lambda x.y)t \to y\{t\}$
- computación restringida que alcanza el resultado $S((\lambda x.\lambda y.x)\, t\, s) = t\{t\}\{s\}$

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $(\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $(\lambda x.y)t \to y\{t\}$
- computación restringida que alcanza el resultado $S((\lambda x.\lambda y.x)\, t\, s) = t\{t\}\{s\}$

La medida $\mathcal{Z}$

t

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $(\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $(\lambda x.y)t \to y\{t\}$
- computación restringida que alcanza el resultado $S((\lambda x.\lambda y.x)\, t\, s) = t\{t\}\{s\}$

La medida $\mathcal{Z}$

$$t \xrightarrow{\quad id \quad} t^g$$

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $(\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $(\lambda x.y)t \to y\{t\}$
- computación restringida que alcanza el resultado $S((\lambda x.\lambda y.x)\, t\, s) = t\{t\}\{s\}$

La medida $\mathcal{Z}$

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[r, "id"] & t^g \arrow[d, "S"] \\
& v
\end{tikzcd}$$

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $(\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $(\lambda x.y)t \to y\{t\}$
- computación restringida que alcanza el resultado $S((\lambda x.\lambda y.x)\, t\, s) = t\{t\}\{s\}$

La medida $\mathcal{Z}$

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[r, "id"] & t^g \arrow[d, "S"] \\
 & \#_b(v)
\end{tikzcd}$$

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los λ−términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $(\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $(\lambda x.y)t \to y\{t\}$
- computación restringida que alcanza el resultado $S((\lambda x.\lambda y.x)\, t\, s) = t\{t\}\{s\}$

La medida $\mathcal{Z}$

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\beta"'] & t^g \arrow[dd, "S"] \\
t' & \\
& \#_b(v)
\end{tikzcd}$$

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $\qquad (\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $\qquad (\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $\qquad (\lambda x.y)t \to y\{t\}$
- computación restringida que alcanza el resultado $\qquad S((\lambda x.\lambda y.x)\, t\, s) = t\{t\}\{s\}$

La medida $\mathcal{Z}$

$$
\begin{tikzcd}
t \arrow[rr, "id"] \arrow[d, "\beta"'] & & t^g \arrow[dd, "S"] \\
t' \arrow[r, "id"] & t'^g & \\
& & \#_b(v)
\end{tikzcd}
$$

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $\qquad (\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $\qquad (\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $\qquad (\lambda x.y)t \to y\{t\}$
- computación restringida que alcanza el resultado $\qquad S((\lambda x.\lambda y.x)\, t\, s) = t\{t\}\{s\}$

La medida $\mathcal{Z}$

$$
\begin{tikzcd}
t \arrow[rr, "id"] \arrow[d, "\beta"'] & & t^g \arrow[dd, "S"] \\
t' \arrow[r, "id"] & t'^g \arrow[d, "S"] & \\
& v' & \#_b(v)
\end{tikzcd}
$$

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $(\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $(\lambda x.y)t \to y\{t\}$
- computación restringida que alcanza el resultado $S((\lambda x.\lambda y.x)\, t\, s) = t\{t\}\{s\}$

La medida $\mathcal{Z}$

$$
\begin{tikzcd}
t \arrow[rr, "id"] \arrow[d, "\beta"'] & & t^g \arrow[dd, "S"] \\
t' \arrow[r, "id"] & t'^g \arrow[d, "S"] & \\
& \#_b(v') & \#_b(v)
\end{tikzcd}
$$

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $(\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $(\lambda x.y)t \to y\{t\}$
- computación restringida que alcanza el resultado $S((\lambda x.\lambda y.x)\, t\, s) = t\{t\}\{s\}$

La medida $\mathscr{Z}$

$$
\begin{tikzcd}
t \arrow[rr, "id"] \arrow[d, "\beta"'] & & t^g \arrow[dd, "S"] \\
t' \arrow[r, "id"] & t'^g \arrow[d, "S"] & \\
& \#_b(v') \arrow[r, phantom, "<"] & \#_b(v)
\end{tikzcd}
$$

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $(\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $(\lambda x.y)t \to y\{t\}$
- computación restringida que alcanza el resultado $S((\lambda x.\lambda y.x)\, t\, s) = t\{t\}\{s\}$

La medida $\mathcal{Z}$

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[rr, "id"] \arrow[d, "\beta"'] & & t^g \arrow[dd, "S"] \\
t' \arrow[r, "id"] & t'^g \arrow[d, "S"] & \\
& \#_b(v') \arrow[r, phantom, "<"] & \#_b(v)
\end{tikzcd}$$

- Estructura sencilla
- Tan costosa como computar
- ¿“Fácil”?

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los $\lambda-$términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $(\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $(\lambda x.y)t \to y\{t\}$
- computación restringida que alcanza el resultado $S((\lambda x.\lambda y.x)\, t\, s) = t\{t\}\{s\}$

La medida $\mathcal{A}$

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los λ−términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $(\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $(\lambda x.y)t \to y\{t\}$
- computación restringida que alcanza el resultado $S((\lambda x.\lambda y.x)\, t\, s) = t\{t\}\{s\}$

La medida $\mathcal{A}$

- Basada en la noción del grado (d) de una subexpresión reducible (redex)
- $\mathcal{A}_D(t) =$ multiset de pares $(d, \{\mathcal{A}_{d-1}(t') \mid t \to t'\})$, para todo $d \geq D$

Dos nuevas medidas decrecientes

El *koan* #26

Asignar a los λ−términos, de una manera *fácil*, ordinales que decrezcan con la computación

Computación en el cálculo λ

- reescritura de términos $(\lambda x.x)t \to t$
- al descartar argumentos se pierde información $(\lambda x.y)t \to y$

Introducción del cálculo λ^g

- proponemos que esa información se guarde $(\lambda x.y)t \to y\{t\}$
- computación restringida que alcanza el resultado $S((\lambda x.\lambda y.x)\, t\, s) = t\{t\}\{s\}$

La medida $\mathcal{A}$

- Basada en la noción del grado (d) de una subexpresión reducible (redex)
- $\mathcal{A}_D(t) =$ multiset de pares $(d, \{\mathcal{A}_{d-1}(t') \mid t \to t'\})$, para todo $d \geq D$
- Estructura compleja de multisets anidados
- Más costosa que $\mathcal{Z}$
- Generalización a todos los redexes de la medida de Turing (restringida a un redex)

Resumen

- Motivación para demostrar terminación de programas
- Técnicas semánticas y sintácticas
- *Koan* sobre medida *fácil*
- Medida $\mathscr{Z}$: sencilla, costosa
- Medida $\mathcal{A}$: compleja, más costosa, extiende resultados de Turing